Proposition de stage : graphes robustes, exploration de partition et arbres binaires

Élie de Panafieu, depanafieuelie@gmail.com
Anne Bouillard, anne.bouillard@nokia-bell-labs.com
Fabien Mathieu, fabien.mathieu@nokia-bell-labs.com
Bell Labs France, Nokia

20 septembre 2017

An english version is available at the end of the document.

Les graphes *robustes* (*reliable* en anglais) sont des graphes connexes qui ont une probabilité la plus grande possible de rester connectés si chaque arête disparaît indépendemment avec une probabilité fixée. Ces graphes apparaissent naturellement dans l'élaboration de réseaux de communication, de circuits électroniques, et pour le partionnement d'ensemble par comparaison d'éléments deux à deux (avec une certaine probabilité d'erreur).

Le problème du calcul de la robustesse d'un graphe a été beaucoup étudié, et est $\#P$-complet (voir le chapitre de Ball et al. (1995)). Par contre, la conception de graphes robustes est peu explorée (voir le résumé de Boesch (1986)). Les résultats existants concernent les cas où la probabilité p de disparition des arêtes tend vers 0 ou 1 et ne sont optimaux qu'au premier ordre en p.

Nous proposons, comme point de départ du stage, d'étudier comment relier les feuilles d'un arbres binaire parfait afin d'obtenir le graphe le plus robuste possible. Selon le profil de l'étudiant, les aspects théoriques, algorithmiques ou heuristiques seront mis en avant. Ce sujet est également lié à des problème plus fondamentaux de théorie des graphes. En effet, construire un graphe robuste implique de réfléchir aux degrés des sommets et à leur répartition, à l'arête-connectivité du graphe, et à la longueur des cycles. Les aspects théoriques pourraient menés à des liens ou des comparaisons avec les graphes de Moore, de Ramanujan, et les cages.

Le stage se déroulera principalement au Lincs, situé au 23 avenue d'Italie (Paris). Il est attendu de l'étudiant des connaissances élémentaires de théorie des graphes et de programmation.

Quelques références bibliographiques. Provan and Ball (1983) ont prouvé que la complexité du calcul de la robustesse d'un graphe est $\#P$-complet. Bauer et al. (1985) proposent des graphes robustes au premier ordre en la probabilité p de panne des arêtes.

Smith (1993) traite le même problème lorsque les sommets peuvent également s'éteindre. L'étude de l'existence, pour un nombre de sommets et d'arêtes donnés, d'un graphe dont la robustesse est optimale pour tout p, a été lancée par Boesch et al. (1991), et les résultats les plus récents sont ceux de Brown and Cox (2014). La moyenne de la robustesse d'un graphe lorsque p parcourt $[0;1]$ a été étudiée par Brown et al. (2014) (complexité $\#P$-complet), et de "bons" graphes pour cette mesure ont été proposés.

English version. Reliable graphs are connected graphs which are likely to remain connected when each edge disappears with probability p. Those graphs occur in the design of networks, electronic circuits, and in the partioning of sets using pairwise comparisons of the elements (when those comparisons have probability p to fail).

Computing the probability for a graph to become disconnected is a $\#P$-complete problem that has been extensively studied (see the chapter of Ball et al. (1995) for example). In contrast, few works are dedicated to the design of reliable graphs (see Boesch (1986)). The existing results focus on the case where p goes to 0 or 1, and results are only optimal in the first order.

The starting point of the internship would be to investigate how to link the leaves of a perfect binary tree so that the obtained graph is reliable. Depending on the profile of the intern, the focus will be on the fundamental, algorithmic, or heuristic aspects of the problem. This topic is also related to more fundamental graph theory problems. Indeed, building a reliable graph requires an analysis of the vertex degrees and their distribution, of the edge-connectivity, and of the lengths of the cycles. This analysis could lead to links and comparisons with Moore's graphs, Ramanujan's graphs, and cages.

The internship will mainly take place at the LINCS, located at the 23 avenue d'Italie (Paris). Candidates should be familiar with basic graph theory and progamming.

Références

M. O. Ball, C. J. Colbourn, and J. S. Provan. Chapter 11 network reliability. In *Network Models*, volume 7 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 673 – 762. Elsevier, 1995.

D. Bauer, F. Boesch, C. Suffel, and R. Tindell. Combinatorial optimization problems in the analysis and design of probabilistic networks. *Networks*, 15(2) :257–271, 1985.

F. T. Boesch. On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis. *Journal of Graph Theory*, 10(3) :339–352, 1986.

F. T. Boesch, X. Li, and C. Suffel. On the existence of uniformly optimally reliable networks. *Networks*, 21(2) :181–194, 1991.

J. Brown, D. Cox, and R. Ehrenborg. The average reliability of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 177(Supplement C) :19 – 33, 2014.

J. I. Brown and D. Cox. Nonexistence of optimal graphs for all terminal reliability. *Networks*, 63(2) :146–153, 2014.

J. S. Provan and M. O. Ball. The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected. *SIAM Journal on Computing*, 12(4) :777–788, 1983.

D. H. Smith. Optimally reliable graphs for both vertex and edge failures. *Combinatorics, Probability & Computing*, 2 :93–100, 1993.